#### שאלה 1:

**סעיף א':**

**לא ריקה:** יהיו אזי קיים.

מלינאריות משמאל של נקבל: .

לכן .

יהיו אזי לכל מתקיים .

**סגירות לחיבור:** מתקיים:

|  |  |
| --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. לינאריות משמאל של תבנית בילינארית |

לכן .

**סגירות לכפל בסקלר:** יהי אזי מתקיים:

|  |  |
| --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. לינאריות משמאל של תבנית בילינארית |

לכן .

לכן תת מרחב של .

**לא ריקה:** יהיו אזי קיים.

מלינאריות מימין של נקבל: .

לכן .

יהיו אזי לכל מתקיים .

**סגירות לחיבור:** מתקיים:

|  |  |
| --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. לינאריות מימין של תבנית בילינארית |

לכן .

**סגירות לכפל בסקלר:** יהי אזי מתקיים:

|  |  |
| --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. לינאריות מימין של תבנית בילינארית |

לכן .

לכן תת מרחב של .

**סעיף ב':** נתון .

**:** יהי אזי לכל מתקיים .

יהי אזי כי לכן , לכן , לכן .

**:** יהי אזי לכל מתקיים .

יהי אזי כי לכן , לכן , לכן .

**סעיף ג':** נסמן . בכל בסיס קיימת ל- הצגה ע"י מטריצה , מסדר .

נסמן ובהכרח מתקיים .

נוכיח כי מתקיים .

יהי אזי לכל מתקיים , באופן שקול מתקיים .

זה נכון לכל לכן בהכרח מתקיים .

קיבלנו מע' משוואות הומוגנית, לכן מימד מרחב הפתרונות הוא , לכן זהו המימד של , לכן .

נוכיח כי מתקיים .

יהי אזי לכל מתקיים , באופן שקול מתקיים .

זה נכון לכל לכן בהכרח מתקיים .

נבצע שיחלוף על שני האגפים, מתקיים ונקבל .

לכן כפי שהסברנו קודם מתקיים .

לכן .

#### שאלה 2:

ממ"פ, לכן קיים בסיס א"נ .

כל הם ק"ל של איברי הבסיס, נסמן .

לכן מתקיים .

יהי אופרטור לינארי כלשהו.

לכל גם , לכן ק"ל של איברי הבסיס, נסמן .

לכן

נתונה תבנית בילינארית, אזי בבסיס קיימת מטריצה המייצגת את , כלומר .

לכל מתקיים .

לכן על מנת שלכל יתקיים נדרש שיתקיים

ומכאן נדרש שיתקיים .

נניח בשלילה שקיים אופרטור לינארי נוסף המקיים לכל .

הנחנו לכן קיים המקיים .

|  |  |
| --- | --- |
| לכל מתקיים: |  |
| כלומר |  |
|  |  |
|  |  |
| בפרט עבור |  |
| לכן מהגדרת מ"פ בהכרח |  |
|  |  |

ומכאן סתירה, לכן אופרטור יחיד.

עבור קיים אופרטור צמוד יחיד המקיים לכל .

נגדיר ונקבל לכל .

#### שאלה 3:

**סעיף א':**

יהיו .

**לינאריות משמאל:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת |  | 1. פתיחת סוגריים | 1. פתיחת סוגריים |
| 1. הגדרת |  |  |  |  |

**לינאריות מימין:**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת |  | 1. פתיחת סוגריים | 1. פתיחת סוגריים |
| 1. הגדרת |  |  |  |  |

**כפל בסקלר:** יהי .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת |  | 1. הוצאת גורם משותף |  |

לכן תבנית בילינארית.

**סימטריות:** יהיו .

מתקיים

לכן מתקיים

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת | 1. קומוטטיביות בכפל | 1. הגדרת |

לכן קיבלנו כי תבנית בילינארית סימטרית.

**סעיף ב':** נראה תחילה כי .

***:*** *יהי אזי לכל מתקיים .*

*סימטרית, לכן לכל מתקיים , לכן .*

***:*** *יהי אזי לכל מתקיים .*

*סימטרית, לכן לכל מתקיים , לכן .*

*לכן .*

*נסתכל על . נראה כי .*

*תהי , אזי קיים כך שמתקיים , לכן .*

*לכן לכל מתקיים , לכן .*

*לכן מתקיים .*

*לכן , לכן .*

*תהי , אזי לכל מתקיים וכן כאשר .*

*נסתכל על מטריצה מהבסיס הסטנדרטי, כלומר מקיימת .*

*לכן מתקיים .*

*עבור מטריצה המקיימת מתקיים , לכן עבור נקבל:*

*לכן , כלומר לכל .*

*עבור מטריצה המקיימת מתקיים , לכן עבור נקבל:*

*לכן לכל .*

*קיבלנו כי , כלומר .*

*קיבלנו כי .*

***סעיף ג':*** *הראינו כי , לכן .*

*לפי שאלה 1 סעיף ג' מתקיים .*

***סעיף ד':*** *הוכחנו בשאלה 1 סעיף ג' שעבור מ"ו ותבנית בילינארית מתקיים .*

*לכן כעת נסתכל על כמ"ו שלנו.*

*הראינו בסעיף ב' שמתקיים , לכן נקבל , כי המטריצה היחידה ב- שהעקבה שלה היא 0 היא מטריצת האפס.*

*לכן .*

*לכן נקבל .*

#### שאלה 4:

*אופרטור לינארי, לכן לכל מתקיים .*

***כיוון :*** *נתון לכל .*

*מהגדרת כתבנית בילינארית מתקיים*

וגם

מהנתון נקבל כי מתקיים

לכל לכן בהכרח .

**כיוון :** נתון כי .

לכן לכל מתקיים:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **נימוקי מעברים:** | 1. הגדרת תבנית בילינארית | 1. נתון | 1. הגדרת שחלוף |
|  | 1. הגדרת תבנית בילינארית |  |  |